Logiques de description, et ontologies en logiques de description

Toolbox 2 Modélisation des Systèmes – Mines Saint-Etienne

3 mai 2016

1 Ontologies en logique de description

Exercice 1 (Sémantique)**.** Dans la logique de description de base $\mathcal{AL}$, soit l'interprétation suivante :

(a) $\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$;

(b) $Homme^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, g\}$;

(c) $aEnfant^{\mathcal{I}} = \{(a, c), (b, d), (b, e), (c, g)\}$;

(d) $marieAvec^{\mathcal{I}} = \{(b, f), (f, b)\}$;

Quelles sont les interprétations des concepts suivants ?

(a) $Parent^{\mathcal{I}}$;

(b) $ParentDeFemme^{\mathcal{I}}$;

(c) $Celibataire^{\mathcal{I}}$;

(d) $HommeMarie^{\mathcal{I}}$;

Corrigé. Les interprétations des concepts sont :

(a) $Parent^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$;

(b) $ParentDeFemme^{\mathcal{I}} = \{b\}$;

(c) $Celibataire^{\mathcal{I}} = \{a, c, d, e, g\}$;

(d) $HommeMarie^{\mathcal{I}} = \{b\}$;

Exercice 2 (Transformée)**.** Exprimer en logique des prédicats les propositions suivantes :

(a) $B \sqsubseteq A \sqcap (\leq 1.g)$;

(b) $A \sqsubseteq \neg(\forall f_1.(\exists f_2.\neg B))$;

(c) $\top \sqsubseteq (\leq 1.f)$.

Corrigé. En logique des prédicats :

(a) : $B \sqsubseteq A \sqcap (\leq 1.g)$

$$\begin{aligned}
&\forall x, B(x) \to \big(A \sqcap (\leq 1.g)\big)(x)\\
\leftrightarrow&\forall x, B(x) \to A(x) \land (\leq 1.g)(x)\\
\leftrightarrow&\forall x, B(x) \to A(x) \land \big(\forall y_1, y_2, g(x,y_1) \land g(x,y_2) \to y_1 = y_2\big)
\end{aligned}$$

(b) : $A \sqsubseteq \neg(\forall f_1.(\exists f_2.\neg B))$

$$\begin{aligned}
&\forall x, A(x) \to \big(\neg(\forall f_1.(\exists f_2.\neg B))\big)(x)\\
\leftrightarrow&\forall x, A(x) \to \neg\big((\forall f_1.(\exists f_2.\neg B))\big)(x)\\
\leftrightarrow&\forall x, A(x) \to \neg\big(\forall y, f_1(x,y) \to (\exists f_2.\neg B)(y)\big)\\
\leftrightarrow&\forall x, A(x) \to \neg\big(\forall y, f_1(x,y) \to \exists z, f_2(y,z) \land (\neg B)(z)\big)\\
\leftrightarrow&\forall x, A(x) \to \neg\big(\forall y, f_1(x,y) \to \exists z, f_2(y,z) \land \neg B(z)\big)
\end{aligned}$$

(c) : $\top \sqsubseteq (\leq 1.f)$

$$\begin{aligned}
&\forall x, \top(x) \to (\leq 1.f)(x)\\
&\forall x, (\leq 1.f)(x)\\
&\forall x, y_1, y_2, f(x,y_1) \land f(x,y_2) \to y_1 = y_2
\end{aligned}$$

Exercice 3 (Constructeurs)**.** Dans la logique $\mathcal{ALUC}$, démontrer les propriétés suivantes par équivalence avec la logique de prédicats :

(a) $\top \equiv C \sqcup \neg C$;

(b) $\neg(C \sqcap D) \equiv (\neg C \sqcup \neg D)$;

En déduire que les logiques $\mathcal{ALUC}$ et $\mathcal{ALC}$ sont équivalentes.

Corrigé. En logique des prédicats :
(a) : démontrons que $\top \equiv C \sqcup \neg C$. Soit x quelconque,

$$\begin{aligned} & (C \sqcup \neg C)(x) \\ \leftrightarrow & C(x) \vee \neg C(x) \\ \leftrightarrow & \top \\ \leftrightarrow & (\top)(x) \end{aligned}$$

Donc $\forall x, (C \sqcup \neg C)(x) \leftrightarrow \top(x)$, ce qui en logique de description s'écrit : $C \sqcup \neg C \equiv \top$

(b) : démontrons que $\neg(C \sqcap D) \equiv (\neg C \sqcup \neg D)$. Soit x quelconque,

$$\begin{aligned} & (\neg(C \sqcap D))(x) \\ \leftrightarrow & \neg(C \sqcap D)(x) \\ \leftrightarrow & \neg(C(x) \wedge D(x)) \\ \leftrightarrow & \neg C(x) \vee \neg D(x) \\ \leftrightarrow & (\neg C)(x) \vee (\neg D)(x) \\ \leftrightarrow & (\neg C \sqcup \neg D)(x) \end{aligned}$$

Donc $\forall x, (\neg(C \sqcap D))(x) \leftrightarrow (\neg C \sqcup \neg D)(x)$, ce qui en logique de description s'écrit : $\neg(C \sqcap D) \equiv (\neg C \sqcup \neg D)$

Ainsi, puisque $\sqcap$ est un constructeur de base dans $\mathcal{AL}$, si en plus on autorise les constructeurs de classe $\neg$ et $\sqcup$ (on se situe alors dans $\mathcal{ALUC}$), alors toute formule qui contient $\sqcup$ peut se réécrire en une formule qui ne le contient pas. Donc autoriser la négation ($\mathcal{ALC}$) est équivalent à autoriser la négation et l'union ($\mathcal{ALUC}$).

Exercice 4 (Constructeurs)**.** Dans la logique $\mathcal{ALEC}$, démontrer les propriétés suivantes par équivalence avec la logique de prédicats :

(a) $\geq 1.g \sqcap \forall g.C \sqsubseteq \exists g.C$;

(b) $\neg\exists f.C \equiv \forall f.\neg C$;

Corrigé. En logique des prédicats :
(a) : démontrons que $\geq 1.g \sqcap \forall g.C \sqsubseteq \exists g.C$. Soit x quelconque,

$$\begin{aligned}
&(\geq 1.g \sqcap \forall g.C)(x) \\
\leftrightarrow&(\geq 1.g)(x) \wedge (\forall g.C)(x) \\
\leftrightarrow&(\exists y, g(x,y)) \wedge \big(\forall z, g(x,z) \to C(z)\big) \\
\leftrightarrow&\exists y, g(x,y) \wedge \big(\forall z, g(x,z) \to C(z)\big) \\
\to&\exists y, g(x,y) \wedge (g(x,y) \to C(y)) && \text{on fixe } z = y\text{, et on perd l'équivalence} \\
\to&\exists y, g(x,y) \wedge C(y) \\
\to&(\exists g.C)(x)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, (\geq 1.g \sqcap \forall g.C)(x) \to (\exists g.C)(x)$, ce qui en logique de description s'écrit : $\geq 1.g \sqcap \forall g.C \sqsubseteq \exists g.C$

(b) : démontrons que $\neg\exists f.C \equiv \forall f.\neg C$. Soit x quelconque,

$$\begin{aligned}
&(\neg\exists f.C)(x) \\
\leftrightarrow&\neg(\exists f.C)(x) \\
\leftrightarrow&\neg\big(\exists y, f(x,y) \wedge C(y)\big) \\
\leftrightarrow&\forall y, \neg f(x,y) \vee \neg C(y) \\
\leftrightarrow&\forall y, f(x,y) \to \neg C(y) \\
\leftrightarrow&(\forall f.\neg C)(x)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, (\neg\exists f.C)(x) \leftrightarrow (\forall f.\neg C)(x)$, ce qui en logique de description s'écrit : $\neg\exists f.C \equiv \forall f.\neg C$

Exercice 5 (Représentation d'une inférence entre des graphes)**.** Soit f un rôle fonctionnel, i.e., $\top \sqsubseteq (\leq 1.f)$. Soit une "règle de contraction" de B illustrée par la figure suivante :

$$\begin{tikzcd} \boxed{A : x} \arrow[r, Rightarrow, bend right, "f"'] & \boxed{y} \arrow[l, Rightarrow, bend right, "f"'] \arrow[r] & \boxed{B : x} \end{tikzcd}$$

Cette règle s'exprime en logique du premier ordre de la manière suivante :

$$(\forall x)[(\exists y)[A(x) \wedge f(x,y) \wedge f(y,x)] \rightarrow B(x)]$$

Soit R un concept auxilliaire quelconque. Nous souhaitons montrer que cette règle est impliquée par l'axiome suivant en logiques de description :

$$A \sqcap \neg B \sqsubseteq R \sqcap (\forall f.(\forall f.\neg R))$$

1. Démontrer que la règle exprimée en logique du premier ordre est équivalente à la proposition suivante :

$$(\forall x)[A(x) \wedge \neg B(x) \rightarrow (\forall y)[\neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)]]$$

2. Soit x quelconque. Démontrer que :

$$R \sqcap (\forall f.(\forall f.\neg R)) \rightarrow (\forall y)[\neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)]$$

3. Conclure.

Corrigé. 1. réécrivons chacune des expressions :

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)[(\exists y)[A(x) \wedge f(x,y) \wedge f(y,x)] \rightarrow B(x)]\\
\leftrightarrow&(\forall x)[B(x) \vee \neg(\exists y)[A(x) \wedge f(x,y) \wedge f(y,x)]]\\
\leftrightarrow&(\forall x)[B(x) \vee (\forall y)[\neg A(x) \vee \neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)]]\\
\leftrightarrow&(\forall x,y)[B(x) \vee \neg A(x) \vee \neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)]
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)[A(x) \wedge \neg B(x) \rightarrow (\forall y)[\neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)]]\\
\leftrightarrow&(\forall x)[(\forall y)[\neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)] \vee \neg(A(x) \wedge \neg B(x))]\\
\leftrightarrow&(\forall x,y)[\neg f(x,y) \vee \neg f(y,x) \vee \neg A(x) \vee B(x)]
\end{aligned}
$$

Donc $(\forall x)[(\exists y)[A(x) \wedge f(x,y) \wedge f(y,x)] \rightarrow B(x)] \leftrightarrow (\forall x)[A(x) \wedge \neg B(x) \rightarrow (\forall y)[\neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)]]$

2. démontrons que $\big(R \sqcap (\forall f.(\forall f.\neg R))\big)(x) \rightarrow (\forall y)[\neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)]$;

$$
\begin{aligned}
&\Big(R \sqcap \big(\forall f.(\forall f.\neg R)\big)\Big)(x)\\
\leftrightarrow&R(x) \wedge \Big((\forall y)\left[f(x,y) \rightarrow \big((\forall z)\left[f(y,z) \rightarrow \neg R(z)\right]\big)\right]\Big)\\
\leftrightarrow&R(x) \wedge \Big((\forall y)\left[\big((\forall z)\left[\neg R(z) \vee \neg f(y,z)\right]\big) \vee \neg f(x,y)\right]\Big)\\
\leftrightarrow&R(x) \wedge \Big((\forall y,z)\left[\neg R(z) \vee \neg f(y,z) \vee \neg f(x,y)\right]\Big)\\
\rightarrow&R(x) \wedge \Big(\neg R(x) \vee \big((\forall y)\left[\neg f(y,x) \vee \neg f(x,y)\right]\big)\Big) && \text{on fixe } z = x\\
\rightarrow&(\forall y)\left[R(x) \wedge \big(\neg f(y,x) \vee \neg f(x,y)\big)\right]\\
\rightarrow&(\forall y)\left[\neg f(x,y) \vee \neg f(y,x)\right]
\end{aligned}
$$

3. Ainsi, le membre de gauche de l'axiome en logique de description est équivalent au membre de gauche de l'équation 1, et le membre de droite de l'axiome en logique de description implique le membre de droite de l'équation 2. Donc, l'axiome en logique de description implique l'équation 1, et donc la règle de contraction.